Control de Matemáticas II

27 de abril de 2012

1. (3 puntos) Una empresa produce un bien según la función de producción

$$Y = f(K, L) = 10 \cdot K \cdot L,$$

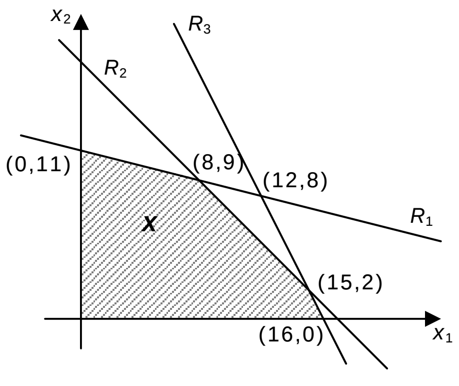
donde K son las unidades de capital y L las unidades de trabajo para producir Y unidades del bien. Si el precio de cada unidad de capital es de 10 € y el de cada unidad de trabajo es de 15 €, calcular las unidades de capital y trabajo necesarias para producir 60 unidades del producto con el mínimo coste posible.

2. (4 puntos) Sea $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$. Calcular los extremos globales de la f en el conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \le 16, x \ge 0, y \ge 0\}$.

3. (4 puntos) Sea $f(x,y) = x^3 - 3x + y^4 - 4y$. Calcular los extremos locales de f.

4. (4 puntos) Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$Max\ x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 44 & (\mathrm{R}_1) \\ x_1 + x_2 \le 17 & (\mathrm{R}_2) \\ 2x_1 + x_2 \le 32 & (\mathrm{R}_3) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$



a) Calcular la solución óptima y el valor óptimo del problema.

b) Calcular el precio sombra de la segunda restricción.

1. (3 puntos) Una empresa produce un bien según la función de producción

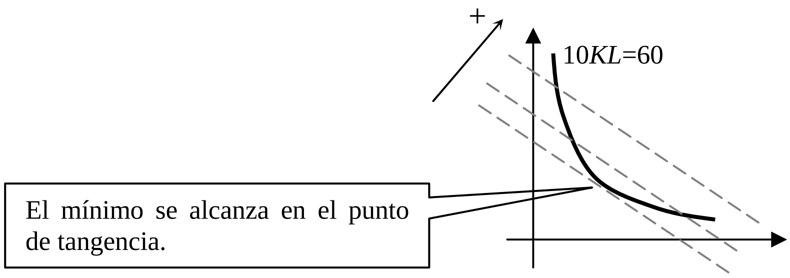
$$Y = f(K, L) = 10 \cdot K \cdot L,$$

donde K son las unidades de capital y L las unidades de trabajo para producir Y unidades del bien. Si el precio de cada unidad de capital es de 10 € y el de cada unidad de trabajo es de 15 €, calcular las unidades de capital y trabajo necesarias para producir 60 unidades del producto con el menor coste posible.

El problema de optimización que hay que resolver es

$$\begin{array}{ll} & Min\ 10K + 15L \\ \text{S. a:} & \left.\begin{array}{l} 10KL = 60 \\ K \geq 0,\ L \geq 0 \end{array}\right\} \end{array}$$

Por curvas de nivel observamos que el mínimo se alcanza en el punto de tangencia de las curvas de nivel con $10KL = 60$.



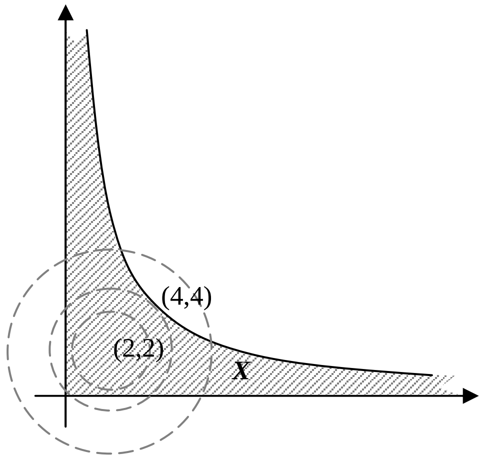
Utilizamos la función lagrangiana para determinar el punto,

$$\mathcal{L}(k, L, \lambda) = 10K + 15L - \lambda[10KL - 60]$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_K(K, L, \lambda) = 10 - 10L\lambda = 0 \xrightarrow[L \neq 0]{} \lambda = \dfrac{1}{L} \\ \mathcal{L}_L(K, L, \lambda) = 15 - 10K\lambda = 0 \xrightarrow[K \neq 0]{} \lambda = \dfrac{15}{10K} \end{array}\right\} 15L = 10K \\ \mathcal{L}_\lambda(K, L, \lambda) = -[10KL - 60] = 0 \end{array}\right\} (3, 2)\ y\ (-3, -2)$$

El menor coste, por tanto, para producir 60 unidades de producto se alcanzará utilizando 3 unidades de capital y 2 de trabajo.

2. (4 puntos) Sea $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$. Calcular los extremos globales de la *f* en el conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$.



El conjunto *X* es un conjunto no acotado por lo que no está garantizada la existencia de extremos globales. Mediante curvas de nivel observamos que el mínimo global se alcanza en el punto $(2,2)$ y que la función *f* no alcanza máximo global en el conjunto *X*.

3. (4 puntos) Sea $f(x,y) = x^3 - 3x + y^4 - 4y$. Calcular los extremos locales de *f*.

Se trata de calcular los extremos locales de la función *f* en su dominio, por lo que deberemos aplicar la teoría de extremos incondicionados.

Condición necesaria:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 3x^2 - 3 = 0 \\ f_2(x,y) = 4y^3 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y = 1 \end{array}$$

Puntos estacionarios $(1,1)$ y $(-1,1)$.

Condición suficiente:

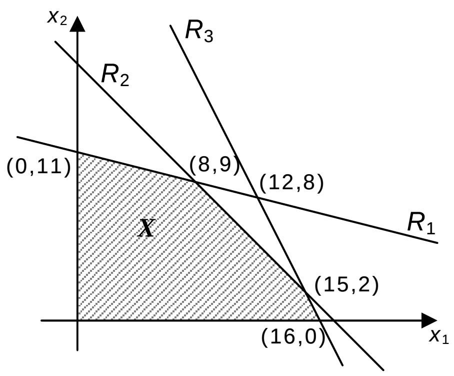
$$|H_f(x,y)| = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y \end{vmatrix}$$

Entonces $|H_f(1,1)| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} > 0$ y $f_{11}(1,1) > 0$; luego el punto $(1,1)$ es un mínimo local de f.

Por otro lado $\left|H_f(-1,1)\right| = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} < 0$, por lo que el punto $(-1,1)$ no es extremo local de la función *f*.

4. (4 puntos) Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$Max\ x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 44 & (\mathrm{R}_1) \\ x_1 + x_2 \leq 17 & (\mathrm{R}_2) \\ 2x_1 + x_2 \leq 32 & (\mathrm{R}_3) \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 & \end{cases}$$



a) Calcular la solución óptima y el valor óptimo del problema.

El conjunto de soluciones óptimas es compacto; por lo que el problema tiene solución optima (función continua en recinto compacto).

Evaluando en los vértices

$f(0,0) = 0$, $f(0,11) = 22$, $f(8,9) = 26$, $f(15,2) = 19$ y $f(16,0) = 16$.

El máximo se alcanza en el $(8,9)$ siendo el máximo valor de la función en el conjunto X 26.

Las pendientes de las restricciones son $m_1 = -\frac{1}{4}$, $m_2 = -1$ y $m_3 = -2$, las curvas de nivel de la función tienen una pendiente de $m_f = -\frac{1}{2}$, por lo que el máximo se alcanza en el punto de intersección de R_1 y R_2, i.e., en el punto $(8,9)$.

b) Calcular el precio sombra de la segunda restricción.

La segunda restricción es saturada en la solución óptima, por tanto al aumentar su término independiente la solución óptima también varía. Esta restricción se puede desplazar hasta que pase por el punto $(12,8)$. Por tanto, para calcular el precio sombra calculamos la variación del valor óptimo y del término independiente en la solución óptima inicial $(8,9)$ y la final $(12,8)$

Término independiente de la segunda restricción: $17 \rightarrow 20$

Solución óptima: $(8,9) \rightarrow (12,8)$

Valor óptimo: $26 \rightarrow 28$

Y el precio sombra de la segunda restricción es: $\lambda = \frac{28-26}{20-17} = \frac{2}{3}$.